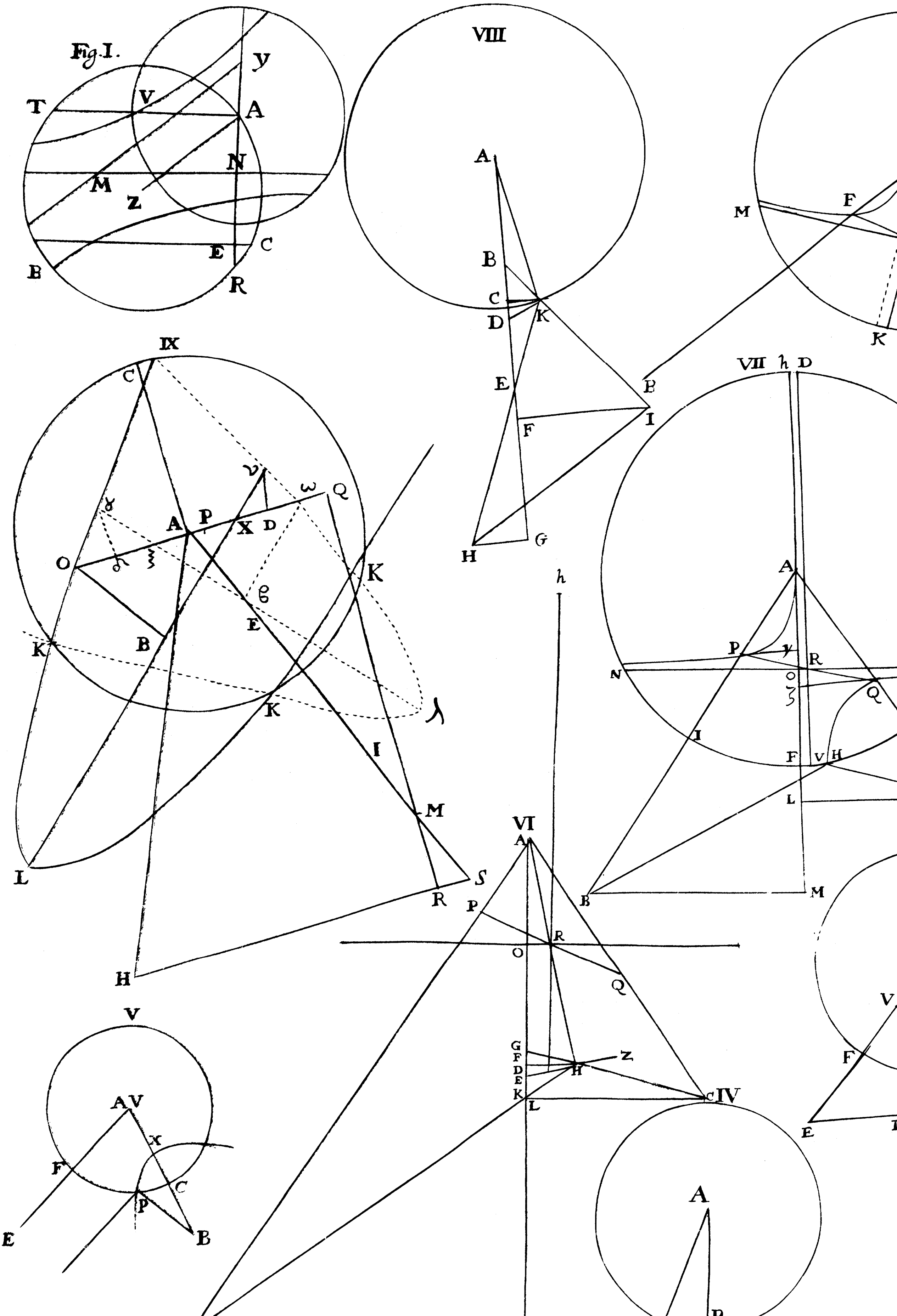
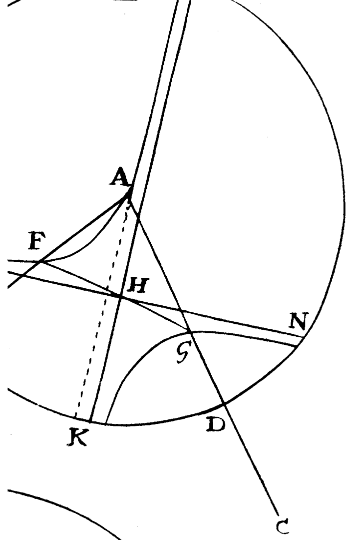
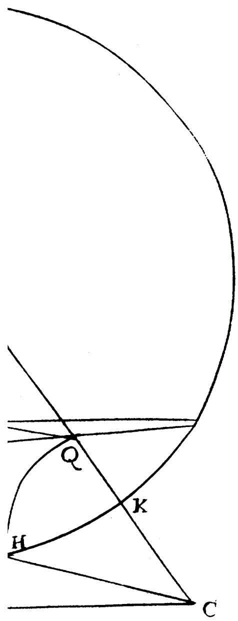


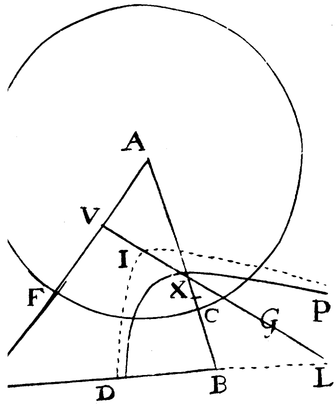
Fig. I.
VIII
IX
VII
VI
V
IV

II





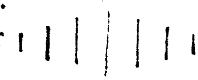
III




B
M
F
P
R
O
B

Transact. N° 98

Whilſt the Sea runneth from Weſt to Eaſt in Flowing, through this *Weſtra-Frith*, there are no greater Surges, than in any other place of the Sea; and in a calm day, it is as ſmooth as any Lake, though there is conſtantly a great current, in the flux and reflux of the Sea. Yet at the South-Eaſt end of the forementioned little Iſland, the Sea no ſooner begins to run weſtward in Ebbing, but there beginneth a ſurge to appear, which continually increaſeth, until the Ebb be half ſpent, and afterwards it decreaſeth, until it be low water; at which time there appeareth no ſuch thing. Eaſt and weſt from this great Surge, there are ſome few leſſer ſurges ſeen, which are gradually leſs, towards the eaſt and weſt, after this manner



I having occaſion to paſs that way, in a little boat, when we had paſſed over the Eaſtmoſt ſurges, and were beginning to aſcend the biggeſt, upon the tenth of *April*, at one of the clock in the afternoon, the ſurge before us was ſo high, that it intercepted the ſight of the Sun, and ſome deg. of the firmament above it. This ſurge is about a quarter of a mile in length. When there is any wind, which occaſioneth the breaking of the tops of the Surges, there is no paſſing that way. The current of the Tyde is ſo ſtrong there, that there is no need of Sails or of Oares, ſave only to direct the boat, as doth the helm.

Continuatio Excerptorum ex Epiſtolis Sluſianis & Hugenianis, *ſuper* Alhazeni *Problemate Optico, in Actis Philoſophicis proximè pragreſſis commemorato.*

DN. *Hugenius* ad noviſſimam Dn. *Sluſii*, p. 6123. & ſeqq. Num. 97. editam, reſcripſit Editori, *Lutetiâ Pariſiorum* Apr. 9. 1672. in hanc ſententiam;

Eſt quod Tibi gratias agam, quòd non fuiſti gravatus Dn. Sluſii *ſuper problemate* Alhaziano *analyſin mihi tranſmittere. Eſt illa doctiſſima & Authore ſuo digniſſima; fuitque in cauſa, dum eam hiſce diebus examinarem, ut novis circa problema illud meditationibus me traderem, eò ſpectantibus, ut conſtructionem quàm poſſem compendioſiſſimam maximeque genuinam obtinerem; quam tandem me conſecutum eſſe reor. Eam hîc adſcribam, poſtquam Tibi compendium illud tradidero, quod eodem tempore inveni circa* primam, *ab initio tibi communicatam. Id autem tale eſt*: Ductâ lineâ AT, parallelâ CB, eaque biſectâ in V, punctum hoc eſt illud, per quod tranſire debet una hyperbolarum oppoſitarum, quarum aſymptoti inventæ fuerint TM, MN.*

* V. *Fig* I.

Sed en Tibi bonam illam conſtructionem, quæ in omnibus caſibus obtinet†. *Sit Circulus datus ED, cujus centrum eſt A; puncta data, B & C.*

† V. *Fig* II.

Ductis lineis AB, AC, fiant proportionales BA (radius circuli) & FA: Eodem modo CA, (radius circuli) & GA. Tum jungatur FG, eaque biſecetur in H; & per hoc punctum ducantur lineæ LHK, MHN, ſe invicem interſecantes ad angulos rectos, quarumque LHK ſit parallela ei, quæ biſecat angulum BAC. Hæ ſunt duæ Aſymptoti Hyperbolarum deſcribendarum per puncta F & G, & quarum una tranſibit etiam per centrum A, quarum interſectiones cum

circuli

circuli peripheria notabunt puncta Reflexionis quæsita. Hucusque Dn. Hugenius,

Quæ Dn. *Slusius* ad hæc reposuit trinis epistolis, sic se habent;

1. *Quæ ad* Alhazeni *problema meditatus sui hactenus, rudia licèt & impolita, tui juris sunt *. De iis igitur dispone prout lubet. Simplicissima est & maximè ingeniosa Nobilissimi* Hugenii *constructio. Vidit quippe Vir acutissimus, quâ ratione ad omnes casus extendi posset* Hyperbola *æqualium laterum, quam in casu anguli recti sese statim offerre præcedentibus meis insinuaveram. Posset quoque ex infinitis* Ellipsibus, *quæ adhiberi possunt, una seligi non difficilis constructionis: sed piget tamdiu in eodem Problemate hærere. Superest tamen aliquid, quod contemplationem habet non injucundam; nim. cùm sectiones, quæ cum circulo dato ad Problematis solutionem adhibentur, illum in quatuor punctis secent, quorum duo tantùm reflexioni serviunt, quæri posset, quodnam Problema solvant duo reliqua, & quânam verborum formâ concipienda sit Propositio, ut quatuor illos casus complectatur. Deinde, annon etiam iidem quatuor casus occurrant cum puncta data æqualiter distant à centro? Vale. Dabam* Leodii *VIII* Junii CIↃIↃCLXXII.

* *Petierat sc. facultatem Editor, hæc in publicum emittendi.*

2. *Clar.* Hugenius *non aliâ utitur analysi quam meâ, quæ Parabolam uno tantùm casu admittit. Quod ut evidentiùs tibi constet, æquationem quam construxit hîc adscribam. Repete memoriâ, si placet, quæ secundis curis ad te scripsi, & invenies, me duas æquationes, problemati per Hyperbolam circa asymptotos solvendo idoneas, assignasse, has nimirum;*

$$2zbaa - 2znae - qqba + qqne = bzqq - zqqe,$$

Et $$bzqq - 2znae - qqba + qqne = 2zbee - zqqe;$$

ac subjecisse, levi mutatione (substituendo, ex. gr. pro qq, *ejus valorem* aa + ee) *inveniri posse infinitas Hyperbolas & Ellipses, quæ cum circulo dato Problema solverent. Nunc in priore ex his æquationibus pro* bzqq *ponatur ejus valor, fiet*

$$zbaa - 2znae - qqba + qqne = bzee - zqqe,$$

Sive $$aa - \frac{qqa}{z} = ee - \frac{qqe}{b} + \frac{2nae}{b} - \frac{qqne}{zb}.$$

Atque hæc est æquatio, quam magno ingenii acumine, ac pari facilitate construxit vir doctissimus. Quod ut tibi pluribus probem, opus non est, quando labore non multo rem ad calculos revocando id agnoscere poteris. Vale. Dab. Leodii *X* Junii CIↃIↃCLXXII.

3. *Problematis* Alhazeniani *memoriam dudum objeceram, Vir Cl.; sed literis tuis admonitus temperare mihi non potui, quin faciliorem ejusdem constructionem quærerem. Incidi autem nuper in sequentem, quâ breviorem cùm dari posse vix credam, committere nolui, quin eam judicio ac censuræ tuæ submitterem. Sint igitur puncta data E B *, circulus cujus centrum A; junctis EA, BA, secantibus circulum in F & C; fiant tres proportionales EA, FA, VA, & tres iterum BA, CA, XA: tum junctâ VX, ac productâ utcunque, (vertice X, latere transverso VX, ac recto ipsi æquali,) describatur Hyperbola XP, cujus applicatæ ad diametrum VXG, parallelæ sint rectæ AB: illa enim satisfacit proposito in casu speculi convexi, ut ejus opposita in casu concavi. Si asymptotos desideres, facilè reperiri possunt,*

*V. *Fig.* III.

productâ VX, donec cum EB, pariter productâ, concurrat in L; deinde bisectâ VX in I, ac sumtâ LD aequali LI; juncta enim DI erit asymptotωn una, in quam alia normaliter incidit ad punctum I.

Sed fortasse ingratum tibi non erit intelligere, quâ viâ ad hanc constructionem pervenerim. Scias itaque, me ex priori mea Analysi deduxisse hoc modo. * *Datis iisdem quae priùs, cadat in EB normalis AO, sitque punctum quaesitum P, ex quo in AO cadat normalis PR. Si AO sit* b, *EO*, z, *OB*, d, *AP*, q, *PR*, e, *AR*, a; *facilè colligitur haec aequatio*

* V.Fig.IV.

$$\frac{2zdae + 2bbae - 2bqqe}{zb - bd} + ee = aa - \frac{2qqa}{b},$$ *quae mutari potest in has;*

$$\frac{zdae + bbae - bqqe}{zb - bd} = aa - \tfrac{1}{2}qq - \frac{\tfrac{1}{2}qqa}{b}.$$ *Et* $$\frac{zdae + bbae - bqqe}{zb - bd} + ee = \tfrac{1}{2}qq - \frac{\tfrac{1}{2}qqa}{b}.$$

Hujus ultimae constructionem olim ad te misi; alterius verò, Cl. Hugenius. *Primam autem, licèt se statim in conspectum dedisset; fermè neglexeram, quòd difficilioris constructionis esse praesumerem. Sed me vano timore delusum agnovi, cúm in hanc, quam ad te mitto, constructionem desinere nuper sum expertus. Sit enim, brevioris calculi causâ,* $z - d = k$, $zd + bb = bm$; *fiet.*

$$ee - \frac{2qqe + 2mae}{k} = aa - \frac{qqa}{b}.$$

Et additis utrinq; $\frac{q^4 + mmaa - 2qqma}{kk}$, *erit*

$$ee - \frac{2qqe + mae}{k} + \frac{q^4 + mmaa - 2qqma}{kk},$$ *hoc est, quadratum ex* $e - \frac{qq + ma}{k}$, *aequale* $aa - \frac{qqa}{b} + \frac{q^4 + mmaa - 2qqma}{kk}$. *Fiet igitur* ἀναλογισμὸς $kk \mid kk + mm \mid aa - \frac{kkqqa}{bkk + bmm} - \frac{2qqma + q^4}{kk + mm} \mid$ & *quadratum* $e - \frac{qq + ma}{k}$: *qui ad aequationem faciliorem reduci potest, si, posito* $kk + mm = pp$, *fiat* $\frac{ky}{p} = a$; *fit enim tandem, quadratum ex* $e - \frac{qq}{k} + \frac{my}{p} = yy - \frac{qqky}{bp} - \frac{2qqmy}{kp} + \frac{q^4}{kk}$; *quam aequationem superiori constructioni respondere animadvertes, si calculos applicueris; ac simul observabis, ad quamcunque linearum EA, AB, BE, referatur Analyseos summa, easdem semper haberi posse sectiones, quamvis longiore circuitu & aequationibus valdè diversis.*

Ex hac constructione, καθ' ἀναλογίαν *deducere licet alterius Problematis effectionem, cùm scil. quaeritur punctum, à quo radius reflexus parallelus sit cuilibet lineae datae; ut, si dato puncto luminoso* * *B, circulo ex centro A, quaereretur radius reflexus parallelus rectae*

* Vid.Fig.V.

recta AE. Idem enim est, ac si, in alio Problemate, distantia punctorum A & E supponeretur infinita; quo casu tertia proportionalis ipsarum EA, FA, abiret in nihilum, & puncta A & V coinciderent: Itaque VX esset æqualis AX, & AE parallela PE. Applica igitur superiorem constructionem, & Problema absolves. Descriptâ scil (vertice X, latere transverso VX, vel AX, & recto ipsi æquali,) Hyperbolâ XP, cujus applicatæ ad diametrum AX, parallelæ sint rectæ AE. Ἀλλὰ τούτων ἅλις. *Vereor enim, ne ut olim silentium meum, ita nunc* φλυαρίαν *ac scribendi intemperiem incuses. Vale itaque, meq; tui observantissimum amare perge. Dab.* Leodii *XXII* Junii CIↃIↃCLXXII.

Sic se habent epistolæ *Slusianæ*, quibus subjicienda nunc, quæ eas proximé secuta est, *Hugenii*, data 1. *Julii*, 1672. *Parisiis*, in hunc sensum;

Volupe mihi erat cognoscere, quæ mihi nuper ex literis Dn. Slusii *communicare voluisti, ipsius nempe Approbationem, nec non doctissimas notas de Problematis* Alhaziani *constructione. Ecce tibi calculum meum ultimum, à calculo insignis illius Geometræ differentem, quique nativâ indole ducit ad Constructionem illam bonam, quam ante hac ad te misi. Verum est, quin imò mirandum, eam quoque inveniri per calculum quem ipse de ea instituit † post mutationem* qq *in* aa + ee; *at hoc videtur fieri casu, nec ibi apparet Constructionis simplicitas nisi postquam eam peragere satagimus.*

† *V. supra epist.* Slusii *dat.* Jun. 10.

Problema Alhazeni.

Dato Circulo, cujus centrum A, radius AD, & punctis duobus B, C; invenire punctum H in circumferentia circuli dati, unde ductæ HB, HC, faciant ad circumferentiam angulos æquales †.

† V. *Fig.* VI.

Ponatur inventum, ductàque AM recta, quæ bifariam secet angulum BAC, ducatur ei perpendicularis HF, itemque BM, CL. Jungatur porrò AH, cui perpend. sit HE, rectisque BH, HC, occurrat AM in punctis K, G.

Sit jam $AM = a$, $MB = b$, $AL = c$, $LC = n$, *Radius* $AD = d$, $AF = x$, $FH = y$.

Quia ergo æquales anguli KHE & CHZ, sive EHG; estque EHA angulus rectus, erit ut KE ad EG, ita KA ad AG. Quia verò BM ad MD, ut HF ad FK, erit,

ut BM + HF ad HF, ita MF ad FK

$$b+y \text{ —— } y \text{ —— } a-x \;\Big|\; \frac{ay-xy}{b+y}$$

add FA x

fit KA $\dfrac{ay+bx}{b+y}$

Rursus, quia CL ad LG, ut HF ad FG, erit permutando & dividendo CL − HF ad HF, ut LF ad FG,

$$n-y \text{ —— } y \text{ —— } c-x \text{ —— } \frac{cy-xy}{n-y}$$

quâ ablatâ ab $AF = x$, *fit* $GA = \dfrac{nx-cy}{n-y}$. *Est autem* $EA = \dfrac{dd}{x}$, *quia proportionales FA,*

AH;

AH, AE. *Ergo EA-GA, hoc est, EG,* $= \frac{dd}{x} - \frac{nx + cy}{n - y}$. *Et KA-EA, hoc est, KE* $= \frac{ay + bx}{b + y} - \frac{dd}{x}$.

Sed diximus, quòd KE ad EG, ut KA ad AG

Ergo $\frac{ay + bx}{b + y} - \frac{dd}{x} \,\Big|\, \frac{dd}{x} - \frac{nx + cy}{n - y} \,\Big|\, \frac{ay + bx}{b + y} \,\Big|\, \frac{nx - cy}{n - y}$.

Unde invenitur $\begin{matrix} 2anxxy + 2bnx^3 - ddbnx - ddnxy \\ -2acxyy - 2bcxxy + ddbcy + ddcyy \end{matrix} = \begin{matrix} naddy + nbddx \\ -addyy - bddxy \end{matrix}$.

Et quia $n = \frac{bc}{a}$, *fit* $\frac{2bbc}{a}x^3 - \frac{bbddcx}{a} - \frac{2bbcyyx}{a}$, *quia* $xx = dd - yy$

Est autem $\frac{2bbc}{a}x^3 = \frac{2bbcddx}{a} - \frac{2bbcyyx}{a}$, *quia* $xx = dd - yy$

Ergo $\frac{-2bbcxyy}{a} - \frac{ddbcxy}{a} - 2acxyy + ddcyy = -addyy - bddxy$.

Et divisis omnibus per y *&* *ductis in* a,

$$-2bbcxy - ddbcx - 2aacxy + ddcay = -aaddy - bddax$$

$$abddx - cbddx + acddy + aaddy = 2aacxy + 2bbcxy$$

$$\frac{abddx - cbddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy,$$ *quæ æquatio est (ad hyperbolam.*

Vel quia $bc = na$, $\frac{abdd - anddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy$.

Sit $\frac{add}{aa + bb} = p$; *Ergo* $\frac{pbx - pnx + pcy + pay}{2c} = xy$.

* V. *Fig.* 7. *Unde porrò non difficulter invenitur sequens Constructio* * : *Jungantur BA, AC, & applicato seorsim ad utramque quadrato radii AD, fiant inde AP, AQ; & juncta PQ, dividatur ipsa bifariam in R, & per punctum R ducantur RD, RN, sese ad rectos angulos secantes, quorumque RD sit parallela AD, quæ dividit bifariam angulum BAC. Erunt jam RD, RN asymptoti oppositarum Hyperbolarum, quarum altera per centrum A transire debet, quæque secabunt Circumferentiam in punctis H quæsitis. Transibunt autem Hyperbolæ per puncta P, G.*

Ratio Constructionis apparet, ductis Pγ & Qζ perpendicularibus in AM. Fit enim $A\gamma = \frac{add}{aa+bb}$ *sive P; &* $A\zeta = \frac{ap}{c}$. *Item* $P\gamma = \frac{pn}{c}$ *&* $Q\zeta = \frac{pb}{c}$. *Quare* $AO = \frac{pc + pa}{2c}$, *&* $OR = \frac{pb - pn}{}$ *Unde cætera facilia.*

Hactenus Dn. *Hugenius.* Quibus Dn. *Slusius* hæc rescripsit.

Mirari desine, Vir Clarissime, eandem in Albazeniano Problemate Constructionem ex diversis Æquationibus deduci, quandoquidem illæ omnes, quibus hactenus usi sumus, in una eademque generali Analysi continentur. Quod ut ostendam, datus sit circulus *, *cujus* * V. Fig. VIII. *centrum A, puncta H & I; sitque punctum quæsitum K, ad quod ex punctis I & H ducantur rectæ HK, IK, & Tangens KD. Tum ex A ducatur quælibet AG, occurrens HK in E, IK in B, Tangenti KD in D (iis nim. productis, quas produci est opus.) . His positis evidens est, ob angulos EKD, DKB, æquales, & angulum AKD rectum, tres AE, BE, DE fore semper harmonicè proportionales. Itaque ductis ad AE normalibus KC, IF, HG, ac denominatis partibus,*

AK. q	*habebitur, methodo, quam in secunda hujus Problematis analysi olim*
AC. a	*adhibui, hæc generalis Æquatio,*
CK. e	$ndaa - bzaa - nqqa + bqqa = ndee - zbee + 2bnae + 2zdae - dqqe - zqqe$
HG. b	
AG. d	*Finge nunc, AG esse perpendicularem ad HI, nihil varietatis erit in*
FA. z	*æquatione, nisi quod AF & AG, hoc est,* d & z, *erunt æquales.*
FI. n	*Posito itaque* d *pro* z, *fiet*

$$ndaa - bdaa - nqqa + bqqa = ndee - dbee + 2bnae + 2ddae - 2dqqe.$$

Sive applicatis omnibus ad $nd - db$

$$aa - \frac{qqa}{d} = ee \frac{+2bnae + 2ddae - 2dqqe}{nd - bd};$$

Eadem nempe, quam ex prima mea Analysi, licèt aliâ viâ, deduxeram, & quam nuper, modo facili constructam, ad te misi.

Pone deinde, AG coincidere cum AH; abibit igitur HG sive b *in nihilum. Expunctis itaque ab æquatione partibus, in quibus* b *reperitur, remanebit,* $ndaa - nqqa = ndee + 2zdae - dqqe - qqze$. *Hanc autem, si meministi, curis secundis inveni, & aliam huic similem in casu quo recta AG transire intelligitur per I.*

Supponamus demum, rectam AG secare bifariam angulum HAI; erit ob similitudinem triangulorum HAG, IAF, ut HG ad GA, ita IF ad FA, sive ut b *ad* d, *ita* n *ad* z, & $nd = bq$. *Ablatis igitur æqualibus, fit,* $bqqa - nqqa = 2bnae + 2zdae - dqqe - qqze$: *Illa ipsa, quam, ut ex literis tuis nuper intellexi, Cl.* Hugenius *construxit.*

Intelligatur tandem eadem recta HG secare bifariam rectam HI; erunt igitur æquales HG, IG, hoc est, $b = n$; *fietque, ablatis æqualibus,*

$bdaa - bzaa = bdee - bzee + 2bbae + 2zdae - dqqe - qqze$; *quam, licet non admodùm difficilem, nemo nostrûm hactenus construxit. Hæ autem, ut & ipsa Generalis æquatio, in duas alias dividi possunt, posito, ut nosti, pro* aa *vel* ee, *ejus valore* $qq - ee$ *vel* $qq - aa$.

Vides igitur, quicquid hactenus præstitum est, in eandem Analysin resolvi; quæ & infinitas alias Constructiones per Circulum datum & Hyperbolam complectatur. Sed eas investigare non est tanti, cùm in hoc Problemate, ut olim fortassis inopiâ, sic nunc copiâ laboremus. Addam tamen unam Constructionem per Parabolam, *idque via duplici; quæ licèt aliis per* Hyperbolam *operosior videatur, lineæ tamen simplicitate, qua Parabola inter reliquas sectiones commendatur, operam compensat.*

Iisdem

Iisdem igitur datis, jungatur * *AI, & producatur in S, donec AS fiat æqualis AH, junctáque HS, & bisecta IS in M, ducatur per M recta RMQ normalis ad HS, in quam cadat ex A normalis AQ, & cui parallelus ducatur radius AC. Tum factis tribus proportionalibus IA, AQ, AE, fiat ut SA ad AE, ita MQ ad AD, & RS ad AP (in recta AQ versus Q;) & in eadem ab alia parte sumatur DO æqualis DC. Demum, bisectâ PD in X, inclinetur per X, angulo semi-recto ad AX, recta VXL, occurrens normali in D erectæ in puncto V, & in quam ex O cadat normalis OB Ajo, si fiat ut VX ad XB, ita XB ad BL, punctum L esse verticem, LV axem, XV latus rectum Parabolæ, quæ Problemati satisfacit omni casu; secans nimirum Circulum datum in punctis K, quorum supremum & infimum ad Problema* Alhazenianum *pertinent, reliqua ad aliud, de quo nuper ad te scripsi.*

* V. Fig. IX.

Datur, ut supra indicavi, alia quoque Parabola, quæ cum hac paria facit, & cujus descriptio ex hac adeò facilè deducitur, ut novâ non sit opus. Sumatur enim Aδ, in directum DA, & ipsi æqualis, & in directum OA, ipsi quoque æqualis, Aω. Tum bisectâ Pδ in ξ, ducatur per ξ recta κξβ, normalis ad XB, concurrens cum δκ, normali ad OA, in κ, & in quam cadat normalis ωβ; ac fiat ut κξ ad ξβ, ita hæc ad βλ: Erit λ vertex, λξ axis, κξ latus rectum Parabolæ, quæ in iisdem cum priore punctis Circulum datum secabit. Sed de Problemate Alhazeni *jam plus quàm satis. Vale, &, quo soles affectu, tui semper observantissimum porrò prosequi perge. Dab.* Leodii *prid. Kal.* Septemb. CIↃIↃCLXXII.

Epistola Doct. *Johannis Wallisii*, PRIMAM Inventionem & Demonstrationem Æqualitatis lineæ Curvæ *Paraboloïdis* cum Recta, anno 1657. factam, Dn. *Guilielmo Neile* p. m. asserens; proximeque Dn. *Christophoro Wren* Equiti, Inventionem lineæ Rectæ æqualis *Cycloidi* ejusque partibus, anno 1658.

Clarissimo Viro, *Henrico Oldenburg*; Johannes Wallis S. Octob. 4. 1673. Oxoniæ.

Clarissime Vir,

Q*Uod ad Rectificationem istius Curvæ spectat, quam ego* Paraboloidem Semi-cubicalem *appellare soleo; omnino errat Cl* Hugenius (pag. 71, 72, Horologii Oscillatorii) *cum ejus inventionem primam tribuit* Johanni Heuratio *Harlemensi, Anno* 1659. *Quippe certum est, eandem Biennio priùs invenisse & demonstrasse* Guilielmum Nelium *Anglum, Equitis* Pauli *filium: Et, post illum, id ipsum demonstrasse (ne plures nominem) Honoratissimum D. Vice-comitem* Brounckerum, *& Cl.* Wrennium, *Anglos; circiter menses Junii, Juliique, Anni* 1657. *atque rem jam tum apud nostros notissimam fuisse; utpote inter eos (Geometras aliosque,) qui* (Societatis Regiæ *appellationem nondum adepti, tum solebant in* Greshamensi Collegio *(post habitas ibidem prælectiones Mathematicas) statis diebus convenire, publicatam & cum plausu acceptam. Idque mihi literis suis,* Augusto *mense tum sequente, ad me* Oxonium *datis, indicavit Honoratissimus D. Vice-comes* Brounker;